**Interpolación polinomial**

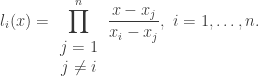
**Interpolación polinomial**

* Se dunha función coñecemos só un conxunto de puntos polos que pasa a súa gráfica, dise que **interpolar** a función é procurar unha función p(x) que pase polos puntos. Se p(x) é un polinomio, trátase de **interpolación polinomial**.
  + O erro, polo menos nos puntos, será 0.
  + Pode ocorrer o denominado ‘fenómeno de Runge’ cando se trata de pasar por todos os puntos, cando hai moitos puntos dispersos e a función queda demasiado oscilante.
    - Isto leva a que, fóra dos puntos coñecidos, a función sexa moi imprecisa.

**Polinomio de interpolación**

* Supoñamos que temos os nodos de interpolación {xi}, distintos dous a dous, e o valor da función f nestes nodos é {yi}.
* Diremos que o polinomio de grao m interpola a f nos nodos de interpolación se para todo i en [1,n].
  + É dicir, o polinomio interpola a f se, nos nodos, ten o mesmo valor que f.
  + Para que o sistema formado sexa CD, **m=n-1**

**Cálculo do polinomio de interpolación**

* Un dos métodos máis sinxelos consiste en calcular antes unha **base do espazo de polinomios.**
  + Os polinomios desta base son denominados **polinomios de Lagrange**
* O i-ésimo polinomio de Lagrange para os nodos {xj} determínase como o único polinomio de grao n-1 que verifica:
* . Este polinomio toma valor 1 no nodo j e 0 nos demais.
* 
* O **polinomio de interpolación dos puntos** será: 
* En cada valor i, **p(xi) = yi**. Isto é debido a que yi  estará multiplicada por 1, e os demais valores por 0.
* **Exemplo**: Interpolación de e^x con 3 puntos. x1=0, x2=1, x3=2.
  + Primeiro, construímos a base.
    - Véxase a condición do produtorio, j=1, **j=/=i.**
    - i=1, j=/=i, j=2,3
    - l1 = \* =
    - Comprobamos: l1(x1) = ½\*(0-0+2) = 1, l1(x2)=0, l1(x3)=0. É correcto.
    - l2(x) = \* = 2x-x^2
    - l3(x) = \* = ½ \* x(x-1)
    - p(x) =
    - p(x) =
    - Esta función polinómica devolve unha gráfica que coincide con e^x nos puntos dados, pero comete un determinado **erro** nos demais puntos.

**Cálculo do erro na interpolación**

* Dise que f é **n veces continuamente diferenciable en (a,b)** se existe a súa derivada n-ésima e esta derivada é continua no intervalo [a,b]
* Se f é n veces continuamente diferenciable en (a,b), para cualquiera x € [a,b] existirá un punto cx € (a,b) tal que:
  + 
* Non coñecemos o valor de cx , polo que asumimos que se trata do máximo valor en (a,b)
  +  Sendo M o límite máximo do erro.
* Entón, podemos afirmar:
  +  Entón, a segunda parte da inecuación será o valor máximo que pode tomar o erro.

**Exemplo de cálculo do erro na interpolación**

* Calcular o erro máximo que se comete ao aproximar y=cos(x) coa parábola que pasa polos puntos 0, pi/2, pi. Estima o erro para x =7pi/18 rad.
* |cos(x) - p(x)| <=
  + = 1
* |cos(x) - p(x)| <=
* |cos(7pi/18) - p(7pi/18)| <=
* |cos(7pi/18) - p(7pi/18)| <= 0,4. Logo, o erro máximo que se pode cometer no punto x=7pi/18 tomando estos 3 puntos.

**Interpolación por tramos**

* Para resolver os erros causados polo fenónemo de Runge, emprégase a **interpolación por tramos**, onde en cada tramo o polinomio sexa de grao baixo.
* Un exemplo pode ser o emprego de rectas para as distintas partes dunha curva. Coñecendo n puntos, podemos determinar n-1 intervalos determinados por n-1 rectas.
  + Sea h a distancia entre puntos, que coñecemos que é a mesma. 
  + Se ademais o valor máximo da derivada segunda da función en [a,b] é M:
  + 
  + Entón, ao aumentar o número de nodos, o erro diminúe cuadráticamente, polo que non se produce o fenómeno de Runge.
* Porén, un polinomio de interpolación por rectas xeralmente non é derivable nos nodos de interpolación.
  + Para resolverlo, tomamos en cada intervalo [xi, xi+1] un polinomio de grao 3, p(x), de tal forma que a unión dos polinomios sexa continua, con derivada primeira e segunda tamén continuas.
  + O resultado coñécese como **spline cúbico**..

**Límites**

* Dise que o límite dunha función f no punto a é L se, cando x se achega a a, f(x) se achega a L, sen excepción.
* C contorno de x0 se existe r>0 tal que (x0-r, x0+r) C C. Es decir, un contorno de x0 es un conjunto que comprende, al menos, todos los números relativamente (según r) más próximos a x0.
* Para demostrar un límite, sería preciso comprobar infinitos valores. Un xeito de formalizar esta idea é mediante **contornos**: o límite de F en a é L se, para todo contorno Y de L, existe un contorno XY de a tal que: 
  + Este método aplícase para calcular propiedades das funcións, e para calcular a orde de converxencia dun algoritmo.

**Cálculo de límites sen indeterminación**

* Suporemos certo que:
  + limx→x0c = c, se c é unha constante.
  + limx→x0 x= x0 (o límite de x é o valor do límite)
* Dados os límites limx→x0f(x)=L e limx→x0g(x)=M, cúmplese que limx→x0[f(x)+g(x)]=L+M.
  + O mesmo é certo para calqueira operación básica (+,-,\*,/)
* As **indeterminacións** son resultados do tipo \displaystyle \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, \displaystyle \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty .

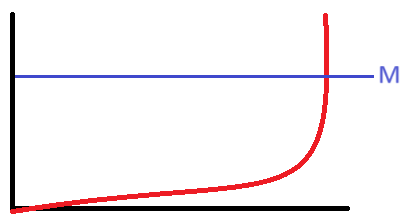
**Cálculo de límites con indeterminación**

* Primeiro, aplícanse técnicas como a eliminación de factores comúns ou L’hópital.
* **Eliminación de factores comúns:** Empregada en indet. 0/0 ou \displaystyle \frac{\infty}{\infty}. Se temos un polinomio no numerador e denominador, podemos simplificalo (aínda que implique dividir entre un término que tende a 0) dividindo ou multiplicando polo mesmo factor en ambas partes.
  + Por exemplo,  inicialmente da 0/0. Multiplicamos arriba e abaixo por 3-√(x2+8), e queda . Simplificamos 000000(1-x2)/(1-x)=(1+x), e queda como resultado 2/(3+3) = ⅓.
* No caso de **límites no infinito de funcións racionais**, tamén podemos compararar o grao dos polinomios e dividir pola x de maior expoñente. Por exemplo, se temos , a solución será ¼.
* En límites do tipo  nas que se obtén 0/0, emprégase a **regra de L’hôpital**, que consiste en derivar a función do denominador e numerador.
  + Para isto, é preciso que existan as derivadas de f e g, e que a derivada de g non se anule en C\X0.

**Demostración de inexistencia dun límite**

* Unha das formas nas que podemos demostralo é se os límites laterais son distintos.

**Propiedades dos límites**

* Se **lim x->x0 f(x) > 0**, daquela existe C contorno de x0 onde **f(C)>0**.
* Se **lim x->x0 f(x) = +inf** , dado M>0, daquela existe C contorno de x0 onde **f(C\X0)>M**. Sendo M calqueira número.
  + Si la función tiende a infinito,podemos establecer cualquier número M, y la función siempre superará eventualmente este M en el **contorno** del punto (no en el propio punto) donde f tiende a infinito.

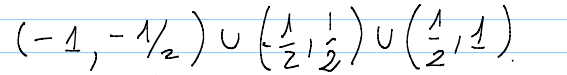
**Continuidade**

* f é continua en x0 se e solo se limx->x0 f(x) = f(x0).
* f é continua nun intervalo I se e solo se f é continua en x para todo x€I.
* Para ser continua en x0 debe estar definida en x0.
  + **Exemplo:** f(x) = x2-1 / x-1 non pode ser continua en 1, pois non está definida en 1.
  + Comprobamos se se pode extender a x=1 con continuidade. Calculamos o límite en x=1.
  + limx->1 (x2-1)/(x-1) = = 2.
  + f’(x) [[1]](#footnote-0)= (x2-1)/(x2-1) se x!=1,

2 se x=1.

* Esta nova f’(x) extendida si é continua en x=1.

**Demostrar que unha función é continua** de forma construtiva

* Sexan dúas funcións f,g continuas nun punto x0, f operado[[2]](#footnote-1) con g é continua en x0 se non leva a indeterminación ou +-inf.
* **Exemplo:** f=senx, g=tgx. se ambas son continuas, tamén o serán senx+tgx, senx\*tgx…
* Se g é continua en x0 e f é continua en g(x0), **fºg** será continua en x0.ç
  + Observación: (fºg)(x0) = f( g(x0) )
* Estas regras serán empregadas para comprobar se unha función é continua.
* [**Exemplo**](https://fundmat.files.wordpress.com/2023/11/continuidade2.pdf)**:** Achar o conxunto onde y = tg(pi\*x)/raíz(1-abs(x)) é continua
  + A función tanxente será continua en todos os puntos reales, **excepto** os valores que son múltiplos impares de pi/2.
    - Logo, tg(pi\*x) non pode ser múltiplo impar de pi/2. Obtenemos que a función non é continua para valores impares de x/2. É dicir, tg(pi\*x) non é continua cando x = k\*½, con k impar, k€Z.
  + Ahora comprobamos o denominador.
    - O denominador debe ser distinto de 0. Excluímos tanto o -1 como o 1.
    - A raíz cuadrada será continua en [0,+inf). Serán inválidos valores que cumplan que |x|>1. Logo, x€(-1,1)
  + Volvendo ao caso previo, coñecemos que x!=½ e x!= - ½.
  + Logo, a función é continua en 

**Teorema de valor intermedio**

* Se f é continua en [a,b], daquela f alcamza todos os valores entre f(a) e f(b).
  + Logo, se f(a) ten signo distinto de f(b), coñécese que debe existir algún punto c€[a,b] tal que f(c). (**Teorema de Bolzano**).
    - Isto é debido a que coñecemos que 0€[f(a),f(b)].
  + Isto é útil para calcular as **raíces** dunha función (ou, polo menos, se as ten).
    - Os métodos de cálculo simbólico integrados en moitos programas informáticos só funcionan para calcular as raíces dun número limitado de funcións. Por exemplo, poden funcionar para unha ec. cuadrática pero non para unha trigonométrica.
    - Outros métodos permiten calcular as raíces, mais requieren coñecer primeiro se as funcións teñen raíces ou non.
  + Por exemplo, coñecemos que a función y=cos(x)-x ten, polo menos, unha raíz en [0,pi].
    - Isto é debido a que a función é continua neste intervalo (xa que cos(x) é continua no intervalo, e x tamén) , e mentres que y(0) é positivo, y(pi) é negativo.

1. Lease como f(x) extendida, é dicir, f(x) cun punto engadido ao dominio. Represémtase con un guión ñ enriba da f. [↑](#footnote-ref-0)
2. Operando: f+g, f-g, f\*g. Para o caso f/g, ademais sería necesario que g(x0) non fose 0. [↑](#footnote-ref-1)